流体力学と数値計算 (近似計算とシミュレーションによる近似解法研究会報告集)

AUTHOR(S):

高見, 穎郎

数理解析研究所講究録
51巻 1968年 93-110

流体力学と数値計算

東大工学部 高見穎郎

この小文を書くきっかけは 1968年1月8-10日に開かれた《近似計算とシミュレーションによる近似解法研究会》である。研究会の表題から不注意にも勝手な想像をめぐらせて,《方程式が厳密に解けないばあいに,それを解析的にいじることを断念し,主要な部分をすべて計算機にまかせるにはどうするか,またどうなるか》ということを流体力学の具体的な問題についてのべるつもりでいた。ところが当日になって,この研究会は実は《近似計算》と《シミュレーション》の二つが接着されたものであり,筆者はこのうち《シミュレーション》に関連した話をすべきであったことがわかった。辞書を開くと《simulare》とは《まねをする》ことだと書いてある。この本来の意味にしたがうなら,自然現象を理解しようとして人間が頭の中で考えること,紙の上に書くこと,実験を行なうこと,計算機に計算をさせること,すべてもとの現象のシミュレーションでないものはないということにな

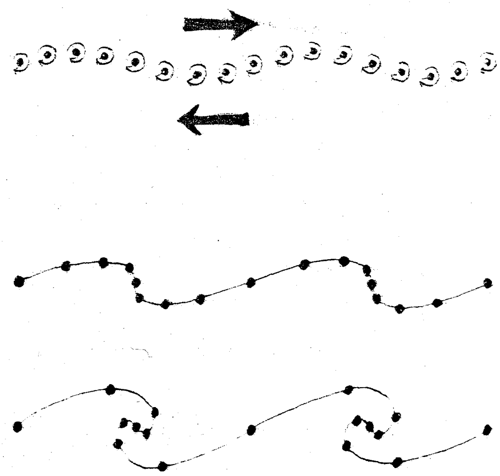
るが，シミュレーションの言葉はふつうもっと限定された意味に使われているようである．研究会のあとで二，三の人にシミュレーション・モデル・数値実験などの定義について質問してみたところ，答は各人各様で意見の統一はえられそうになかった．ここでは，筆者がはじめにとりちがえたままを書くことにする．したがって，研究会の本来の趣旨にそわないものになってしまったことをおわびしなければならない．また，実例のえらびかたもかたよっていると思うし，現象でまとめたり計算法でまとめたりして記述が不統一になっていることも御諒承いただきたい．これから数値計算をしようとされるかたの何かのお役に立てばさいわいである．

1.　流体の運動を記述するのに，流体各粒子の位置を時間の関数として追跡するやりかたが考えられる．これがいわゆる Lagrange 的記述法である．この方法による数値計算は素朴な意味できわめて《実験的》である．流体中にあって流体によって運ばれる不連続面や不連続線の運動を追跡するのに適している．

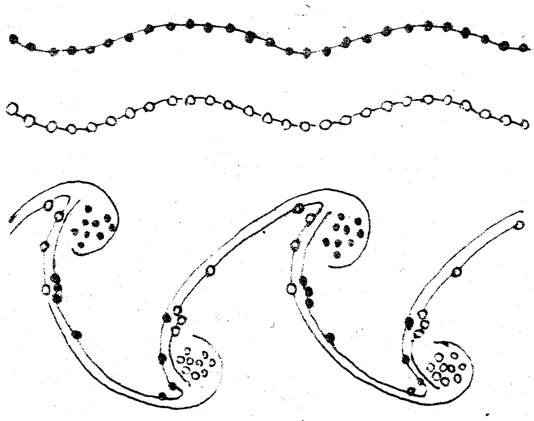
<u>渦糸の変形</u>　静止した完全流体中に1本の渦糸をおいたとする。渦糸が直線であれば，そのまわりには軸対称の流れが生ずるだけでいつまでも直線の形を保つ。しかし何かの原因で形が直線から少しでもはずれると，自分自身のつくる非対称な速度場のために一般にはますます変形が大きくなる。渦糸をたくさんの短い部分にわけ，各部分はそれ以外の部分がつくる速度場（Biot-Savart の場）に乗って運ばれるとして，渦糸全体の変形を追跡することができる。

2次元的な層流境界層が3次元的な乱流に遷移するメカニズムを，流れの中におかれた渦糸の変形というモデルで調べることが行なわれている［1］。

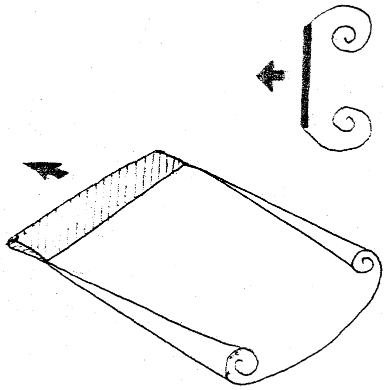
<u>渦面の変形</u>．速度の異なる二つの流れの境界に凹凸ができると，それが次第に発達して集中した渦ができてくることが知られている（Kelvin-Helmholtz の不安定現象）．渦面とその上下の流れを，完全流体中に平行



に並んだ離散的な渦糸でおきかえ，それらがつくる速度場での各渦糸の運動を調べれば渦面の変形を追跡することができる［2］．



平行に並んだ2枚の渦面の変形を同じ方法で追跡すれば，流れの中におかれた物体のうしろにKármán渦列が形成されるメカニズムが定性的にとらえられる［3］．



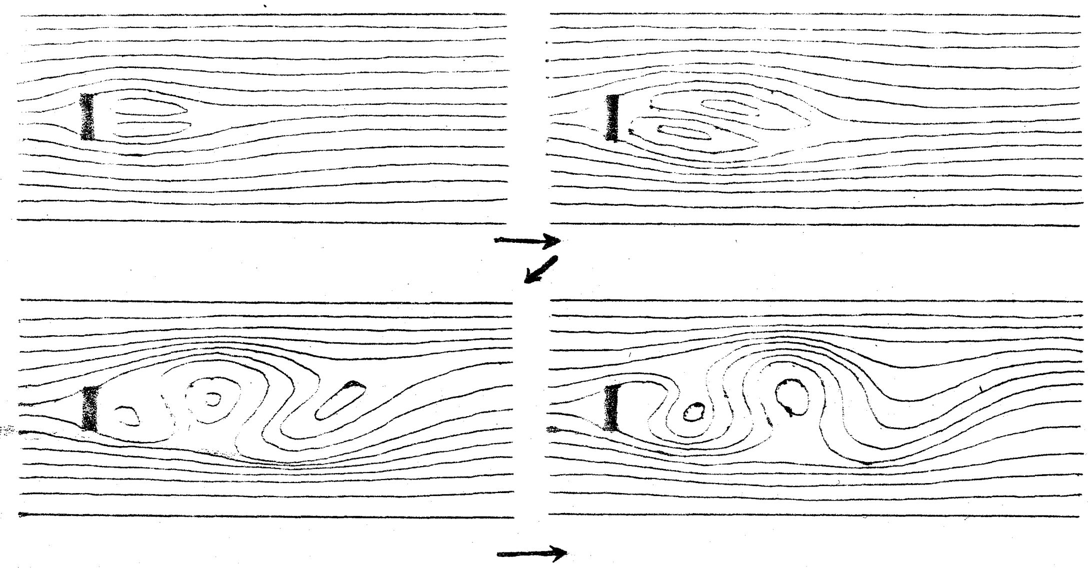
また，突然動きだした物体のへりから生ずる渦面や，飛行機の翼のうしろにできる渦面のまきこみなども，同様の方法で調べることができる［4］．

この種の計算では流体の粘性を無視している．したがって，渦面の変形がはげしいところでは粘性がきいて渦面がぼけるという現実の効果がとり入れられていない．しかし集中渦の形成や渦面のまきこみの有様が比較的簡単な計算で一目してわかる．

2. Lagrange 的記述法に対して，空間に固定した各位置でそこを通過する流体の諸量を時間の関数としてとらえるのが Euler 的記述法である．Lagrange 的記述法による計算が常微分方程式の数値解に帰着したのに対して，こんどは偏微分方程式を数値的に解くことになる．それには，空間に固定した適当な網目を想定し，微分方程式を，場の量の網目の上での値に対する差分方程式に書きなおしてこれを解く．次に代表的な例をいくつかあげる．

粘性流体の運動　ちぢまない粘性流体の運動はいわゆる Navier-Stokes 方程式にしたがう．これは流体の速度，圧力，あるいは流線関数，渦度などに対する放物型の方程式である．これを適当な差分方程式で近似し，初期値を与えてその後の運動を調べる．

溝の中の一様な流れの中に2次元的な物体をおき，非対称の微小攪乱を与えたときそれが成長して Kármán 渦列を形成するにいたる過程など，きれいな数値実験がなされている[5]．



非対称攪乱から Kármán 渦列が形成される (Fromm, 1963)

Navier-Stokes 方程式の時間 t を含まない解を問題にするときには，適当な初期値からはじめて十分大きな t まで解を追跡してもよいし [6]，定常の Navier-Stokes 方程式に対応する差分方程式をたとえば relaxation などの逐次修正法で解いてもよい [7]．あるいはまた，運動が定常状態におちついたときにはちょうど定常 Navier-Stokes 方程式をみたすようになる仮想的な流体の運動方程式をこしらえ，その方程式の解を十分大きな t まで追跡するという方法も可能である [8]．これらの方法で目標の解に到達するまでの過程は，物理的内容を問題にしなければ，数値計算の上では実質的に同じこと

を行なっていると考えられる.

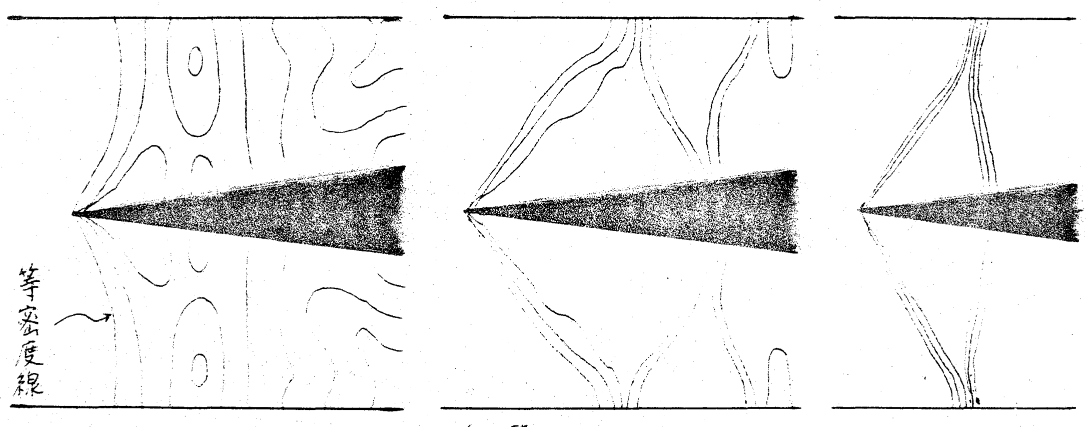
これらの方法で Navier-Stokes 方程式を解くことは, 流れの Reynolds 数 R が小さいときには比較的やさしいが R が大きくなるにつれてむずかしくなる. R が大きくなると場の量の空間的変化のはげしいいわゆる境界層が生じ, 余程こまかい網目を用いなければこれを精密にとらえることができない. また, うまい差分スキームを用いないと安定性の問題がきびしくなってくるように思われる.

衝撃波を伴う流れ　粘性のないちぢむ流体の流れは, 流速・密度・内部エネルギーに対する双曲型の方程式にしたがう. このような流れでは, 流速が大きくなるとこれらの量の不連続面として《衝撃波》が流れの中に現れる. 衝撃波をはじめから不連続面として扱おうとすると, 衝撃波の位置・形・強さ・伝播速度などをそれの前後の連続的な流れとつじつまがあうようにきめなくてはならないので, 一般には非常に面倒な問題となる. また, この種の問題の解は一意的でないことがあるので, たとえば熱力学の第2法則の助けによって物理的に意味のある解

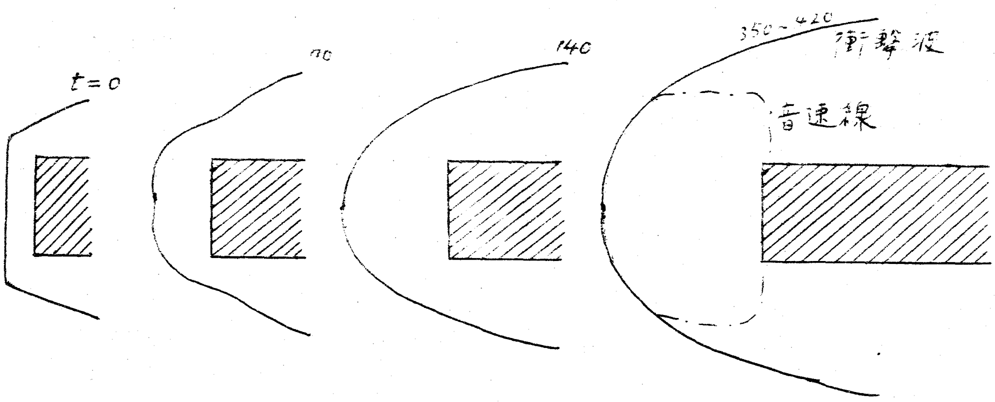
をえらびだす必要もおこる。

しかし，もとの微分方程式を適当な差分方程式で近似すると，不連続面のことなど顧慮しないでも，単に機械的な計算によって衝撃波の形成・伝播の様子をとらえることができる。この方法ではまた，時間的・空間的の網目を（適当な条件のもとで）こまかくしていけば，差分方程式の解が微分方程式の不連続な解（あるいは弱い解）に収束し，しかも微分方程式の解が一意でないばあいには物理的に実現可能な解に自動的に収束することが示される[9]．

さらに，衝撃波ができたときにはその位置では0でない値をとり，それ以外のところでは実質的に0となるような余分な項をもとの方程式につけ加えることによって，衝撃波の前後に現れる本質的でない凹凸を



くさびと衝撃波　(Burstein, 1964)



四角柱と衝撃波（Burstein, 1967）

おさえてきれいな結果をだすことができる（人工粘性法）。この方法は衝撃波の1次元的伝播の問題にはじめて適用されたが[10]，くさびその他の物体に当る2次元流中に衝撃波が形成される過程を追跡するのにも用いられて成功している[11]。

なお，これとは全く別の考えかたから導かれた差分スキームがある。これは人工粘性を付加するというのではなく，単調関数を単調関数に移すという条件からきめられたもので，結果的にはもとの方程式の特性曲線の性質を正しく考慮して計算を行なうというスキームになっている。この方法によっても衝撃波の問題がうまく処理できる[12]。

以上あげた差分スキームは，衝撃波が散逸性の非線型波であるという性質をうまくもり込んであるといえる。したがって，たとえばいわゆるKortewegde Vries 方程式にしたがうような分散性の波に対しては，また別の考察からそれに適したスキームをさがす必要があろう[13]

3.　Lagrange 的方法と Euler 的方法とを組合せて用いることによって，もっと複雑な流れの場を計算することが可能となる．　米国 Los Alamos 研究所の人人によって開発された方法を二つ簡単に紹介する．

<u>PIC 法</u>　　運動方程式を適当な差分方程式で近似し，その中の輸送項（慣性項）とそれ以外の項とを分離して，Euler 的と Lagrange 的の二つのステップをふんで少し後の時刻の場を求める方法がある．すなわち，まず空間に固定した網目を想定し，その上で速度・運動量・圧力・内部エネルギーなどの場の量の初期値を与える．次に，輸送項を省略した方程式によってすぐ次の時刻の場の量を計算する（Euler 的）．一方，あらかじめ多数の粒子を空間に配置させておき，それらを上で計算した速度にしたがって移動させる．この際，各粒子には上で計算した運動量と内部エネルギーを運ばせる（Lagrange 的）．このようにし

て流体粒子と場の量の新しい分布がつくられる．この操作を何度も繰返す．これは Particle-in-cell 法とよばれる[14]．

一つの気体中に別種の気体の泡があってそこを衝撃波や希薄波が通過するときの流れ，超音速で飛行する物体の後流，平板に沿う極超音速流などに有効に用いられている[15]

<u>MAC 法</u>　前述の PIC 法のように方程式の輸送項とそれ以外の項を分離することはせず，方程式をフルに用いて次の時刻の場を Euler 的に計算し，あらかじめ配置しておいた粒子をこうして計算した流れにのせて運ばせるという方法がある．Marker-and-cell 法とよばれる．PIC 法とちがって粒子は速度をになうだけである．したがって，MAC 法で用いる粒子は流体粒子ではなくて，いわば流れの様子を見るために水に浮べたアルミニウム粉末のようなものである．この方法は流体の境界に変形がおこるばあいに便利に用いられる．ダムが決壊したときの流れ，自由表面や 2 種の流体の境界面に生じた振動の増幅（Rayleigh-Taylor の不安定現象）などについて興味ある結果がえられている[16]．

文献

以下にあげる文献は，本文にのべた事柄だけに話を限っても決して網羅的でなく，むしろかなりかたよったものであることをお断りしておく．

[1] Hama, F. R.: Progressive deformation of a curved vortex filament by its own induction. Phys. Fluids 5 (1962)1156.

Hama, F. R.: Progressive deformation of a perturbed line vortex filament. Phys. Fluids 6 (1963) 526.

[2] Rosenhead, L.: The formation of vortices from a surface of discontinuity. Proc. Roy. Soc. A134 (1931) 170.

Birkhoff, G. and J. Fisher: Do vortex sheets roll up? Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. 2, vol. 8 (1959) 77.

Hama, F. R. and E. R. Burke: On the rolling-up of a vortex sheet. Univ. of Maryland Tech. Note BN-220, 1960.

Hama, F. R.: Streaklines in a perturbed shear flow. Phys. Fluids 5 (1962) 644.

[3] Abernathy, F. H. and R. E. Kronauer: The formation of vortex streets. J. Fluid Mech. 13 (1962) 1.

[4] Westwater, F. L.: The rolling up of the surface of discontinuity behind an aerofoil of finite span. British A. R. C. Reports and Memoranda No. 1692 (1936) 116.

Takami, H.: A numerical experiment with discrete-vortex approximation with reference to the rolling up of a vortex sheet. Dept. of Aero. and Astro., Stanford Univ., SUDAER No. 202, 1964.

[5] Fromm, J.: A method for computing nonsteady, incompressible, viscous fluid flows. Los Alamos Sci. Lab. Report LA-2910, 1963.

Fromm, J. E. and F. H. Harlow: Numerical solution of the problem of vortex street development. Phys. Fluids 6 (1963) 975.

Fromm, J. [17].

Amsden, A. A. and F. H. Harlow: Slip instability. Phys. Fluids 7 (1964) 327.

Hirota, I. and K. Miyakoda: Numerical solution of Kármán vortex street behind a circular cylinder. J. Meteor. Soc. Japan 43 (1965) 30.

[6] Payne, R. B.: Calculations of unsteady viscous flow past a circular cylinder. J. Fluid Mech. 4 (1958) 81.

Kawaguti, M. and P. Jain: Numerical study of a viscous fluid flow past a circular cylinder. J. Phys. Soc. Japan 21 (1966) 2055.

Fromm, J. E.: Numerical solutions of the nonlinear equations for a heated fluid layer. Phys. Fluids 8 (1965) 1757.

[7] Thom, A.: The flow past circular cylinder at low speeds. Proc. Roy. Soc. A141 (1933) 651.

Kawaguti, M.: Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow around a circular cylinder at Reynolds number 40. J. Phys. Soc. Japan 8 (1953) 747.

Apelt, C. J.: The steady flow of a viscous fluid past a circular cylinder at Reynolds numbers 40 and 44. British A. R. C. Reports and Memoranda No. 3175, 1958.

Keller H. B. and H. Takami: Numerical studies of steady viscous flow about cylinders. Numerical Solutions of Non-linear Differential Equations, (John Wiley & Sons, 1966) 115.

Michael, P.: Steady motion of a disk in a viscous fluid. Phys. Fluids 9 (1966) 466.

Burggraf, O. R.: Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. J. Fluid Mech. 24 (1966) 113.

Janssen, E.: Flow past a flat plate at low Reynolds numbers. J. Fluid Mech. 3 (1958) 329.

[8] Chorin, A. J.: Numerical study of thermal convection in a fluid layer heated from below. Courant Institute of Mathematical Sciences, AEC Res. and Developt. Report, NYO-1480-61, 1966.

最近ソ連で，同じような方法によって物体のまわりの流れを高いレイノルズ数までうまく計算したそうである（東大宇宙研 大島耕一氏より）。

[9] Lax, P. D. [19].

[10] von Neumann, J. and R. D. Richtmyer [19].

Lax, P. D. and B. Wendroff [19].

[11] Burstein, S. Z.: Numerical methods in multidimensional shocked flows. AIAA Journal 2 (1964) 2111.

Burstein, S. Z.: Finite-difference calculations for hydrodynamic flows containing discontinuities. J. Comp. Phys. 1 (1966-67) 198.

[12] Годунов, С. К.: Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Мат. Сборник 47 (89), 1959, 271.
野木達夫氏（京大工）の詳細な計算によればLax-Wendroffの方法よりもすぐれているとのことである。

[13] Zabusky, N. J. and M. D. Kruskal: Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Letters 15 (1965) 240.

[14] Evans, M. E. and F. H. Harlow: The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations. Los Alamos Sci. Lab. Report LA-2139, 1957.

Harlow, F. H.: The particle-in-cell method for numerical solution of problems in fluid dynamics. Proc. Symposia Appl. Math., vol. 15 (American Math. Soc., 1963), 269.

Harlow, F. H. [17].

[15] Evans, M. W., F. H. Harlow and B. D. Meixner: Interaction of shock or rarefaction with a bubble. Phys. Fluids 5

(1962) 651.

Amsden, A. A. and F. H. Harlow: Numerical calculation of supersonic wake flow. AIAA Journal 3 (1965) 2081.

Butler, T. D.: Numerical solutions of hypersonic sharp-leading-edge flows. Phys. Fluids 10 (1967) 1205.

[16] Harlow, F. H. and J. E. Welch: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. Phys. Fluids 8 (1965) 2182.

Harlow, F. H. and J. E. Welch: Numerical study of large-amplitude free-surface motions. Phys. Fluids 9 (1966) 842.

Daly, B. J.: Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability. Phys. Fluids 10 (1967) 297.

以上の論文のほかに，たとえば Monte Carlo 法による解法など，重要であるが本文では全然ふれなかったものがいくつもある．数値解法のいろいろな手法・実例を解説した次の本を見ていただきたい．

[17] Alder, B., S. Fernbach and M. Rotenberg: Methods in Computational Physics, Academic Press.

Vol. 3 --- Fundamental methods in hydrodynamics, 1964.

Schulz, W. D.: Two-dimensional Lagrangian hydrodynamic difference equations,

Frank, R. M. and R. B. Lazarus: Mixed Eulerian-Lagrangian method.

Trulio, J. G.: The Strip code and the jetting of gas between plates.

Noh, W. F.: CEL: a time-dependent, two-space-dimensional coupled Eulerian-Lagrange code.

Maenchen, G. and S. Sack: The tensor code.

Wilkins, M. L.: Calculation of elastic-plastic flow.

Hoskin, N. E.: Solution by characteristics of the equations of one-dimensional unsteady flow.

Richardson, D. J.: The solution of two-dimensional hydrodynamic equations by the method of characteristics.

Harlow, F. H.: The particle-in-cell computing method for fluid dynamics.

Fromm, J.: The time dependent flow of an incompressible viscous fluid.

Vol. 4 --- Applications in hydrodynamics, 1965.

Leith, C. E.: Numerical simulation of the earth's atmosphere.

Bryan, K.: Nonlinear effects in the theory of a wind-driven ocean circulation.

Lewis, G. E.: Analytic continuation using numerical methods.

Chahine, M. T.: Numerical solution of the complete Krook-Boltzmann equation for strong shock waves.

Haviland, J. K.: The solution of two molecular flow problems by the Monte Carlo method.

Gentry, R. A., F. H. Harlow and R. E. Martin: Computer experiments for molecular dynamics problems.

Mack, L. M.: Computation of the stability of the laminar compressible boundary layer.

Morgan, W. B. and J. W. Wrench, Jr.: Some computational aspects of propeller design.

Henyey, L. G. and R. D. Levée: Methods of the automatic computation of stellar evolution.

Abramovici, F. and Z. Alterman: Computations pertaining to the problem of propagation of a seismic pulse in a layered solid.

流体の問題は偏微分方程式の初期値・境界値問題に帰着するものが多い．これを差分法で解くばあいの基礎となる事柄については，たとえば次の本をおすすめする．この本は，前半では差分スキームの安定性に関する理論的基礎を，後半ではいろいろな差分スキームの得失についての具体的な議論と応用例（大部分が流体の問題）を解説した名著であると思う．

[18] Richtmyer, R. D. and K. W. Morton: Difference methods for initial-value problems, 2nd edition, Interscience, 1967.

なお次の論文集がある．偏微分方程式の数値解法の基礎となる重要な論文がおさめられている．

[19] 物理学論文選集 154 応用数学 V
— 偏微分方程式の数値解法 — 日本物理学会, 1967.

Courant, R., K. Friedrichs and H. Lewy: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann. 100 (1928) 32.

Lax, P. D. and R. D. Richtmyer: Survey of the stability of linear finite difference equations. Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956) 267.

Young, D.: Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. Trans. Amer. Math. Soc. 76 (1954) 92.

von Neumann, J. and R. D. Richtmyer: A method for the numerical calculations of hydrodynamic shocks. J. Appl. Phys. 21 (1950) 232.

Lax, P. D.: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954) 159.

Lax, P. D. and B. Wendroff: Systems of conservation laws. Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960) 217.

(1968-3-25)